SUJET DE THÈSE : STABILISATION ET CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME DE STEFAN

DIRECTEUR DE THÈSE : TAKÉO TAKAHASHI (IECL)
CO-DIRECTEUR : JÉRÔME LOHÉAC (CRAN)
LIEUX : INSTITUT ÉLIE CARTAN DE LORRAINE, NANCY ET
CENTRE DE RECHERCHE EN AUTOMATIQUE DE NANCY

RÉSUMÉ. Dans cette thèse, on s'intéressera au problème de contrôlabilité et de stabilisation de l'interface de fusion d'un solide. Ce problème peut-être modélisé par les équations de Stefan. Ces équations font intervenir deux équations de chaleur couplées au point de fusion. Il s'agit d'un problème non linéaire à frontière libre.

Mots clefs : Contrôle, Stabilisation, Équation de la chaleur, Problème de Stefan, État contraint.

1. Problématique générale, Contexte

En dimension un, la fusion ou solidification d'un solide peut-être représentée par un problème de Stefan. Pour une présentation plus générale du problème de Stefan, on pourra se référer à [4, 9, 10, 7]. Plus précisément, supposons que l'intervalle $(0,1)$ corresponde au domaine occupé par les phases liquide et solide. On supposera aussi que les deux phases sont connexes, ainsi on note $s(t) \in (0,1)$ la position de l'interface liquide-solide. On supposera aussi que la phase liquide occupe l'intervalle $(0, s(t))$ et que la phase solide, l'intervalle $(s(t), 1)$.

Notons $y_l(t,x)$ la température dans la phase liquide et $y_s(t,x)$ celle dans la phase solide et supposons que la température de fusion soit nulle. Les températures dans les deux phases sont régies par l'équation de la chaleur,

$$\begin{aligned} \dot{y}_l(t,x) &= \partial_x^2 y_l(t,x) && (t>0, x \in (0, s(t))), \\ \dot{y}_s(t,x) &= \partial_x^2 y_s(t,x) && (t>0, x \in (s(t), 1)). \end{aligned}$$

À l'interface liquide-solide, la température est égale à la température de fusion,

$$y_l(t, s(t)) = y_s(t, s(t)) = 0 \qquad (t > 0).$$

L'évolution de la position de l'interface $s(t)$ est décrite par le saut de la dérivée normale de la température,

$$\dot{s}(t) = -\partial_x y_l(t, s(t)) - \partial_x y_s(t, s(t)) \qquad (t > 0).$$

Enfin afin d'éviter l'apparition de nouvelle phases dans le domaine, on imposera que la solution satisfasse,

$$y_l(t,s) \geqslant 0 \quad (x \in (0, s(t))) \quad \text{et} \quad y_s(t,s) \leqslant 0 \quad (x \in (s(t), 1)) \qquad (t > 0).$$

Enfin, il sera possible d'agir sur l'état du système à l'aide de contrôles. À titre d'exemple, on pourra se donner deux contrôles $u_0(t)$ et $u_1(t)$ et imposer les conditions limites,

$$\partial_x y_l(t, 0) = u_0(t) \quad \text{et} \quad \partial_x y_s(t, 1) = u_1(t) \qquad (t > 0).$$

Bien entendu, l'ensemble de ces équations est assujetti à des conditions initiales. Concernant le caractère bien posé de ce système, on pourra se référer à [2, 3].

2. Objectifs de la thèse

Dans de récents travaux, [5, 6], la stabilisation vers des états stationnaires de la forme $\bar{y}_l = \bar{y}_s = 0$ et $s = \bar{s} \in (0,1)$ a été prouvée. Ce résultat a été prouvé à l'aide de la méthode de *baskstepping*, cf. [1]. Cependant, ce contrôle par retour d'état, nécessite la connaissance de tout l'état à tout instant. Cette contrainte n'est pas réalisable en pratique. Ceci conduit à une première question :

Q.1. Est-il possible de stabiliser le système vers un état stationnaire de la forme $\bar{y}_l = \bar{y}_s = 0$ et $s = \bar{s} \in (0,1)$, avec un contrôle dépendent seulement d'une mesure partielle de l'état ?

---

couriels : takeo.takahashi@inria.fr et jerome.loheac@univ-lorraine.fr.
Début de la thèse en octobre 2021.

Il est aussi naturel de s'intéresser à la stabilisation du système vers d'autres états stationnaires. Plus précisément, étant donné deux constantes $\bar{u}_0$ et $\bar{u}_1$, les états stationnaires du système sont les triplets $(\bar{y}_l, \bar{y}_s, \bar{s})$ solutions de :

$$\begin{gathered}
0 = \partial_x^2 \bar{y}_l(x) \quad (x \in (0, \bar{s})) \quad \text{et} \quad 0 = \partial_x^2 \bar{y}_s(x) \quad (x \in (\bar{s}, 1)),\\
\bar{y}_l(\bar{s}) = \bar{y}_s(\bar{s}) = 0,\\
\partial_x \bar{y}_l(0) = \bar{u}_0 \quad \text{et} \quad \partial_x \bar{y}_s(1) = \bar{u}_1.\\
0 = -\partial_x \bar{y}_l(\bar{s}) - \partial_x \bar{y}_s(\bar{s}),
\end{gathered}$$

Q.2. Est-il possible de stabiliser le système vers un état stationnaire $(\bar{y}_l, \bar{y}_s, \bar{s})$ non trivial ?

À cause du principe de comparaison pour l'équation de la chaleur, il est aisé de montrer que tout état stationnaire $(0, 0, \bar{s})$ ne peut être atteint en un temps fini.

Q.3. Est-il possible de contrôler le système vers un état stationnaire $(\bar{y}_l, \bar{y}_s, \bar{s})$ non trivial ?

Dans, [6], le contrôle construit permet d'assurer, les conditions de signe sur y_l et y_s, ceci permet d'omettre ces contraintes d'état. En revanche, celles-ci doivent être prises en comptes avec d'autres stratégies de contrôle. En particulier si l'état stationnaire $(\bar{y}_l, \bar{y}_s, \bar{s})$ est contrôlable, ces contraintes de positivité vont induire un temps minimal de contrôlabilité (cf. [8]).

Q.4. Si $(\bar{y}_l, \bar{y}_s, \bar{s})$ est un état stationnaire contrôlable peut-on donner une caractérisation du temps minimal de contrôlabilité et existe-t-il un contrôle en ce temps minimal ?

Enfin, à notre connaissance, les seuls résultats de stabilisation portent sur le système de Stefan en unidimensionnels. Il est naturel de se demander si des résultats similaires existent en dimension supérieure. Dans ce cas une difficulté majeure est de correctement formaliser le problème de contrôle. En effet, en dimension trois (respectivement deux), l'interface solide-liquide est une surface (respectivement une courbe). Une façon simple d'aborder ce problème est de considérer des domaines liquide et solides à symétrie axiale. Ceci permet de revenir à un système unidimensionnel. Les questions précédentes se posent de nouveau avec l'opérateur de Laplace (∂_x^2) remplacé par l'opérateur de Laplace cylindrique ou sphérique.

3. Prérequis

Ce sujet demande à la fois des compétences en automatique et en mathématiques appliquées. En plus des connaissances de base en automatique, des notions sur les équations aux dérivées partielles seront souhaitées.

Par ailleurs, des expérimentations numériques seront demandées. Il sera donc nécessaire d'avoir des notions élémentaires en approximation numérique ainsi que de maîtriser des logiciels de calcul numérique tels que `Matlab` ou `Scilab`.

Références

[1] D. M. Bošković, A. Balogh, and M. Krstić. Backstepping in infinite dimension for a class of parabolic distributed parameter systems. *Math. Control Signals Systems*, 16(1) :44–75, 2003.

[2] J. R. Cannon and M. Primicerio. A two phase Stefan problem with flux boundary conditions. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 88 :193–205, 1971.

[3] J. R. Cannon and M. Primicerio. A two phase Stefan problem with temperature boundary conditions. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 88 :177–191, 1971.

[4] S. C. Gupta. *The classical Stefan problem.* Elsevier, Amsterdam, 2018. Basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods, New edition of [MR2032973].

[5] S. Koga, M. Diagne, S. Tang, and M. Krstic. Backstepping control of the one-phase Stefan problem. In *2016 American Control Conference (ACC)*, pages 2548–2553, July 2016.

[6] S. Koga and M. Krstic. Single-boundary control of the two-phase Stefan system. *Systems Control Lett.*, 135 :104573, 9, 2020.

[7] S. Koga and M. Krstic. *Two-Phase Stefan Problem*, pages 139–157. Springer International Publishing, Cham, 2020.

[8] J. Lohéac, E. Trélat, and E. Zuazua. Minimal controllability time for the heat equation under unilateral state or control constraints. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 27(9) :1587–1644, 2017.

[9] L. I. Rubenšteĭn. *The Stefan problem.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Translated from the Russian by A. D. Solomon, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 27.

[10] L. Rubinstein. The Stefan problem : comments on its present state. *J. Inst. Math. Appl.*, 24(3) :259–277, 1979.